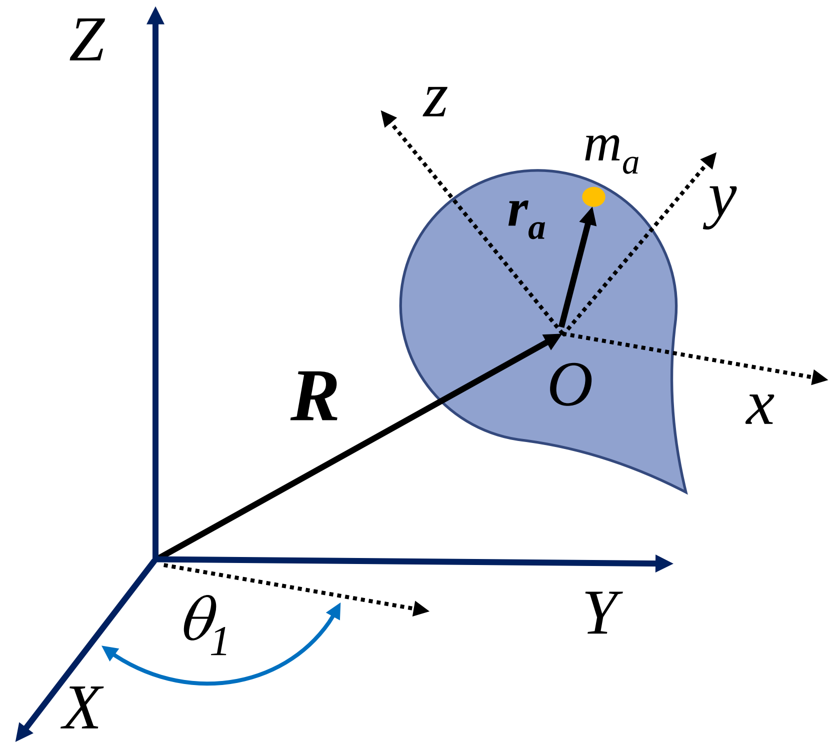
ЛЕКЦИЯ 14.
Движение твердого тела

А.И. Валишев, В.Г. Сербо.

Df. **Твердым телом *(ТТ)* называется совокупность материальных точек (частиц) взаимные расстояния между которыми неизменны.**
У твердого тела *(ТТ)* невозможна деформация.
Модель *ТТ* применима в классической механике.
Скорость распространения сигнала в объёме *ТТ* бесконечна.

27.1. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

27.1. Поступательное и вращательное движение твердого тела.



Вводится подвижная (собственная) система координат твердого тела.
Начало отсчета т. *O*, **координатные оси собственной системы** *x*, *y*, *z*.

Df. **Положение твердого тела относительно инерциальной (лабораторной) системы задаётся координатами а) радиус вектора** $\boldsymbol{R}$ (X, Y, Z) + **б)тремя пространственными углами** $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ **подвижной (собственной) координатной системы** (x, y, z) **относительно лабораторной системы** (X, Y, Z).

Твердое тело – совокупность материальных точек пронумерованных индексом *a* с массами m_a и радиус – векторами r_a ; ($a = 1,\ldots,N$).

27.1.1. Поступательное движение.

Положение произвольной т. твердого тела относительно лабораторной системы отсчета всегда задается вектором:

$$\vec{R}_a = \vec{R} + \vec{r}_a \,.$$

Df. **Движение при котором меняется радиус – вектор $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$, при этом радиус вектор $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{const}$ постоянен называется поступательным.**

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} + \vec{r}_a\right) = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \frac{d\vec{r}_a}{dt} = 0 \,.$$

$$\boldsymbol{v}_a = d\boldsymbol{R}/dt = \boldsymbol{V} \,.$$

Вращение отсутствует. Углы поворота радиус вектора $\boldsymbol{r}_a$ не меняются.

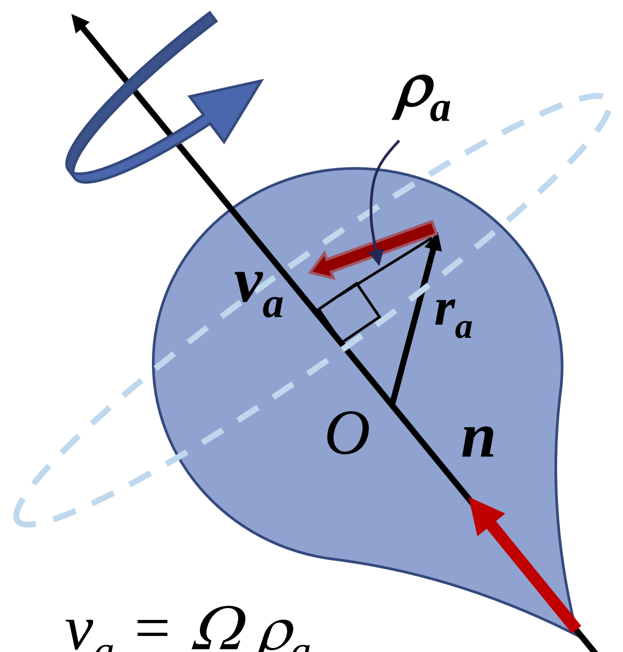
27.1.2. Вращательное движение.

Df. Движение при котором меняется радиус – вектор $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}_a(t)$, при этом радиус вектор $\boldsymbol{R} = const$, (положение т. O не меняется) называется вращательным.

Вводится вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$. Твердое тело вращается вокруг оси которая определена направлением, заданным единичным вектором $\boldsymbol{n}$.

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cdot \boldsymbol{n}$$

Рассматривается движение материальной точки a в системе связанной с неподвижной т. O $\rightarrow$ $d\boldsymbol{R}/dt = 0$



Скорость v_a :

$$|v_a| = \Omega\,\rho_a = \Omega\, r_a \sin\alpha\,,$$

$$\vec{v}_a \perp \vec{r}_a\,,\;\; \vec{v}_a \perp \Omega\,;$$

Вследствие только вращения:

$$\vec{v}_a = \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right] = \vec{\Omega} \times \vec{r}_a\,.$$

$$v_a = \Omega\,\rho_a$$

27.1.3. Произвольное движение твердого тела.

Df. **Произвольное движение – объединение поступательного и вращательного.**

При произвольном движении твердого тела скорость точки a **складывается из скорости поступательного + вращательного движений:**

$$\vec{v}_a = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_a =$$
$$= \vec{V} + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right].$$

Nb. **Вектор угловой скорости** $\boldsymbol{\Omega}$ **не! зависит от выбора положения т.** O **на твердом теле.**

Действительно. Полный оборот частица совершает при любом выборе т. O **за одно время.**

27.1.3. Произвольное движение твердого тела. (продолжение)

Утверждение. **Существуют выбор координат т.** O **при котором в этой точке** $V = 0$ **в некоторый заданный момент времени.**

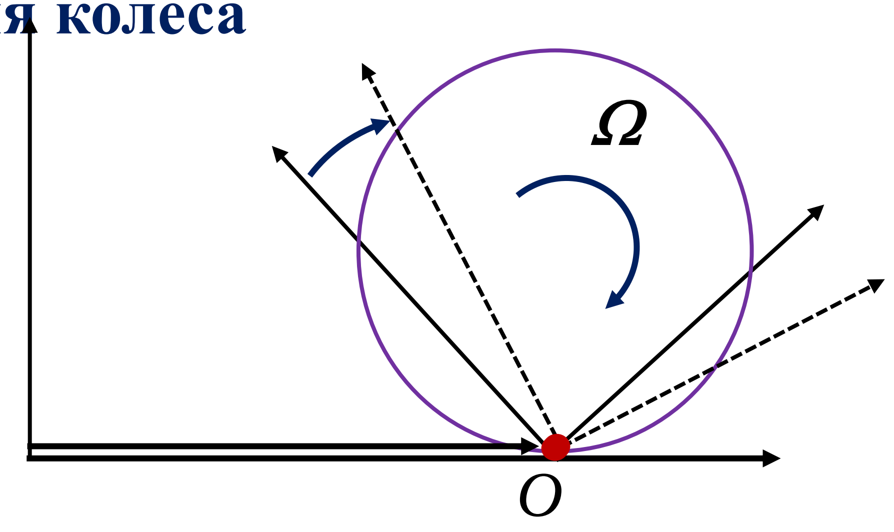
В этом случае движение тела представимо как чисто вращательное. Через т. O **где** $V = 0$ **проходит** ***мгновенная ось вращения.***

Пример.

Качение без проскальзывания колеса по плоскости.

Точка O **– т. касания колеса с плоскостью – мгновенный центр вращения.**

В каждый момент времени скорость точки касания колеса с плоскостью $V = 0$.



Пример, продолжение

Качение без проскальзывания колеса по плоскости. Точка *O* **– точка касания колеса с плоскостью – мгновенный центр вращения.**
В каждый момент времени скорость точки касания $V = 0$.

Мгновенная ось вращения.
Предельные случаи *a*), *b*).

a*). *Вращения нет.

$\omega = 0$, $V = v_{cm}$;

Поступательное движение колеса как целого со скоростью $\vec{v}_{cm}$

b*). *Только вращение.

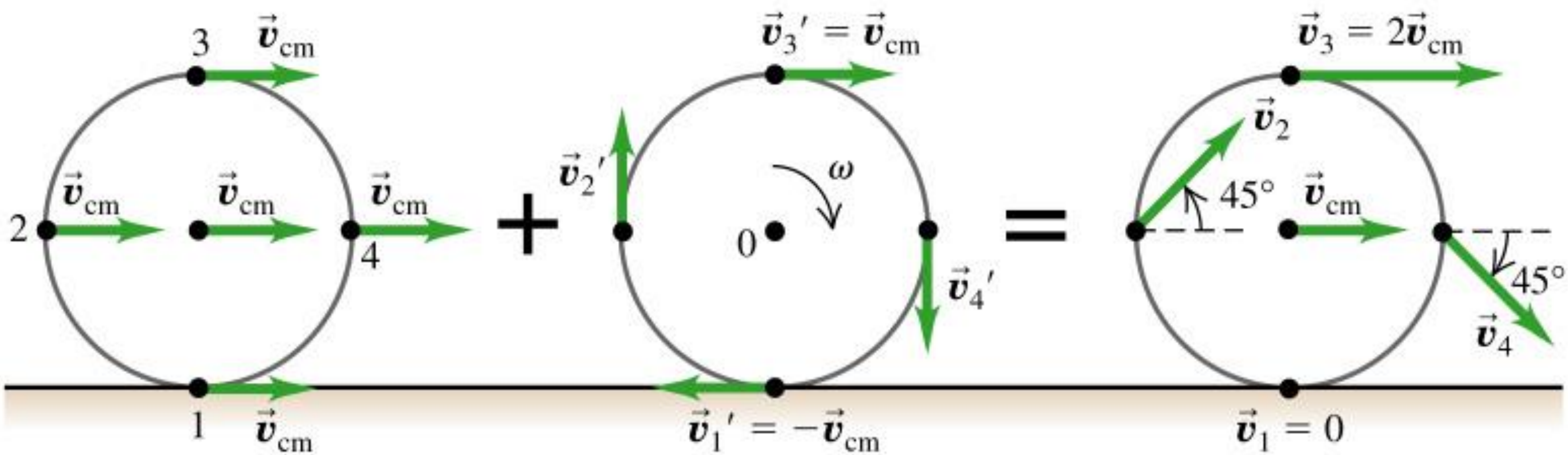
$\omega \neq 0$, $V = 0$;

Вращение колеса относительно центра масс. Скорость точки на ободе v_{cm}

***c*) .**

$\omega \neq 0$, $V = \omega R$.

Качение колеса с вращением без проскальзывания относительно т. касания



28. Импульс *ТТ*. Кинетическая энергия *ТТ*. Момент инерции *ТТ*.

28.1. Импульс твердого тела.

Df. $\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a \cdot \left(\vec{V} + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]\right) =$

$$= \vec{V} \sum_a m_a + \sum_a \left[\vec{\Omega}, m_a \vec{r}_a\right].$$

Координата центра масс $\boldsymbol{r}_C$:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{m}, \qquad m = \sum_a m_a ;$$

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = m\vec{V} + \sum_a \left[\vec{\Omega}, m_a \vec{r}_a\right] = m\vec{V} + m\left[\vec{\Omega}, \vec{r}_C\right].$$

Пусть начало подвижной системы помещено в центр масс твердого тела: $\vec{r}_C = 0$, $\vec{P} = m\,\vec{V}_C$!

Следствие.

«Импульс твердого тела равен импульсу частицы с массой равной полной массе тела движущейся со скоростью центра масс $V = V_C$.»

28.2. Кинетическая энергия твердого тела.

Df. $K = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{v}_a^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \cdot \left(\vec{V} + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]\right)^2$;

$$\left(\vec{V} + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]\right)^2 = \vec{V}^2 + \vec{V} \cdot \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right] + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]^2 ;$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{V}^2 + 2\vec{V} \cdot \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right] + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum\nolimits_a m_a \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]^2 + \vec{V} \cdot \sum\nolimits_a m_a \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum\nolimits_a m_a \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]^2 + m\vec{\Omega}\left[\vec{r}_C, \vec{V}\right] , \qquad \vec{r}_C = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{m} .$$

Если начало отсчета подвижной системы поместить в центр масс, то:

$$\vec{r}_C = 0 , \qquad \rightarrow \qquad K = \frac{1}{2} m \vec{V}_C^2 + \frac{1}{2}\sum\nolimits_a m_a \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]^2 ;$$

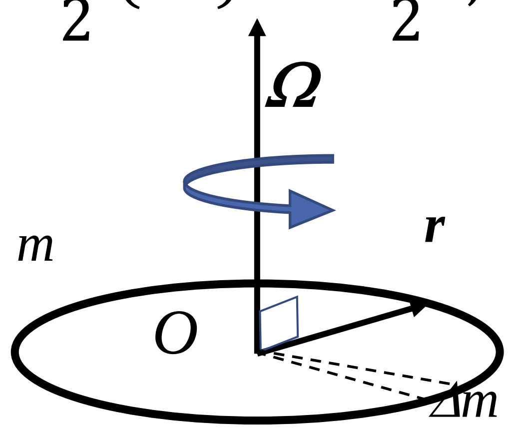
$$\boxed{K = \frac{1}{2} m \vec{V}_C^2 + K_C , \qquad K_C = \frac{1}{2}\sum\nolimits_a m_a \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]^2 .}$$

«Кинетическая энергия твердого тела K равна кинетической энергии частицы массы равной массе тела, движущейся со скоростью центра масс плюс кинетическая энергия вращательного движения K_C относительно оси, проходящей через центр масс тела.»

Пример. **Кинетическая энергия вращения однородного тонкого обруча относительно оси, проходящей через геометрический центр (см рис.). Полагаем:**

$$V_C = 0. \; K_C = \frac{1}{2}\sum \Delta m \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\Omega r)^2 \sum \Delta m = \frac{m}{2}(\Omega r)^2 = \frac{I\Omega^2}{2}, \qquad I = mr^2 .$$



28.3. Момент инерции твердого тела.

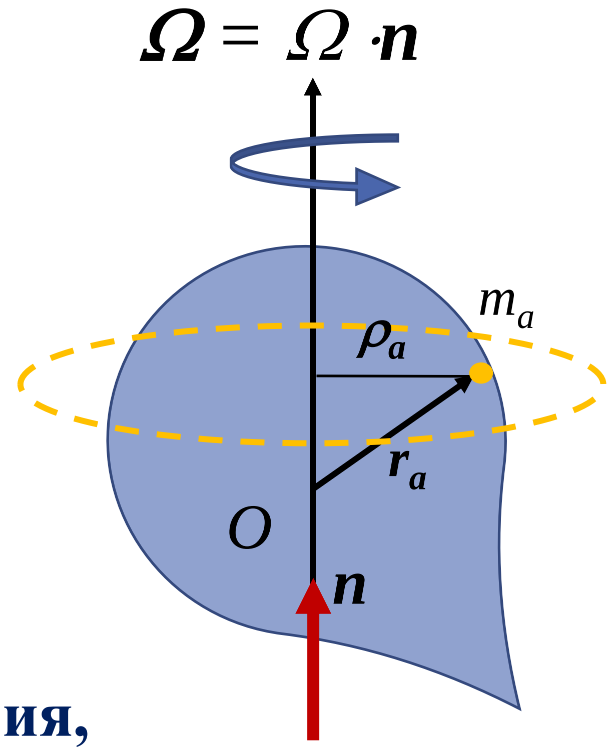
Рассматривается вращение твердого тела, $V_O = 0$.

$$K_{Rotate} = \frac{1}{2}\sum_a m_a \left[\vec{\Omega}\,,\vec{r}_a\right]^2 ,$$

$$K_{Rotate} = \frac{1}{2}\sum_a m_a (\Omega\rho_a)^2 =$$

$$= \frac{\Omega^2}{2}\sum_a m_a \rho_a^2 = \frac{1}{2} I_n \Omega^2 .$$

$$\boxed{I_n = \sum_a m_a \rho_a^2 \ .}$$



Df. I_n **– называется моментом инерции твердого тела относительно оси вращения, заданной вектором** ***n*****.**

Частные случаи.

Моменты инерции при заданном направлении *n* относительно осей *x*, *y*, *z* подвижной системы:

A) $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{x}$, $\quad I_x = I_1 = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2)$;

B) $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{y}$, $\quad I_y = I_2 = \sum_a m_a (x_a^2 + z_a^2)$;

C) $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{z}$, $\quad I_z = I_3 = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2)$.

Докажем: $I_i + I_j \geq I_k$. **Действительно, например:**

$$I_1 + I_2 = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2) + \sum_a m_a (x_a^2 + z_a^2) =$$

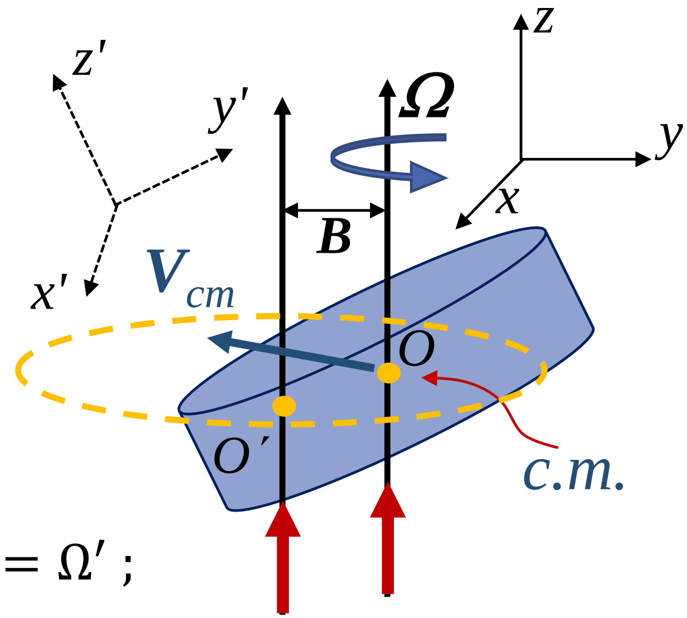
$$= \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2 + 2z_a^2) \geq$$

$$\geq \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) = I_3 \ .$$

Для плоского тела которое лежит в плоскости *x*, *y* ($z_a = 0$) **следует:** $I_1 + I_2 = I_3$.

28.4 Теорема Гюйгенса- Штейнера.

Определим соотношение между кинетической энергией вращения в системе (x, y, z) K_{cm} **, связанной с центром масс (т.** O **) и кинетической энергией** K **в другой, подвижной системе** (x', y', z') **. Сдвиг между параллельными осями вращения –** B**.**



$$K_{cm} = \frac{1}{2} I_n^{cm} \Omega^2 , \qquad \Omega = \Omega' ;$$

$$K_{O'} = \frac{1}{2} I_{n'} \Omega^2 .$$

Согласно общему правилу: $K = \frac{1}{2} m \vec{V}_{cm}^2 + K_{cm}$ **находим:**

$$\frac{1}{2} I_{n'} \Omega^2 = \frac{1}{2} m \vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_n^{cm} \Omega^2 ,$$

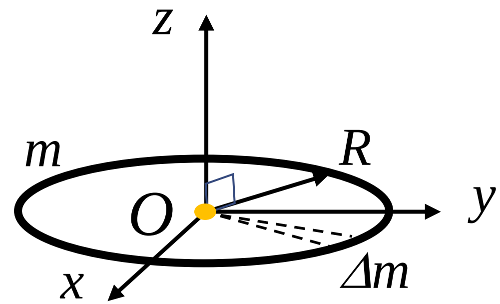
Учитывая $V_{cm} = B\Omega$ **получаем:**

$$\boxed{I_{n'} = I_n^{cm} + mB^2 .}$$

Доказана теорема Гюйгенса – Штейнера.

Следствие. **Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс имеет наименьшее значение.**

28.4. Примеры вычисления моментов инерции тел.



Пример 1. **Однородное кольцо массы *m*, радиуса *R*.**

$$I_z = I_3 = mR^2 .$$

В силу симметрии: $I_1 = I_2 = (1/2)\cdot I_3 = mR^2/2$.

Пример 2. **Однородный диск массы *m*, радиуса *R*.**

Диск разбивается на семейство тонких по радиусу концентрических колец. Дифференциально малая толщина кольца – dr . **Масса элементарного кольца:**

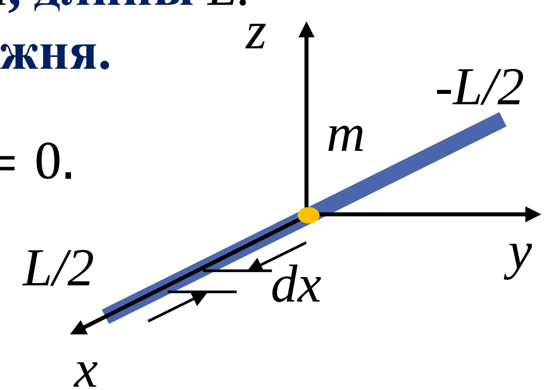
$dm = \rho\, dS = \rho\, 2\pi\, rdr$, ρ - **плотность материала диска.**

$$dm = \rho 2\pi r dr = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr\ ;$$

$$I_3 = \int_0^R r^2 dm = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}\ , \qquad I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{mR^2}{4}\ .$$

Пример 3. **Однородный тонкий стержень массы *m*, длины *L*.**

А) **Ось вращения в центре масс (посередине) стержня.**



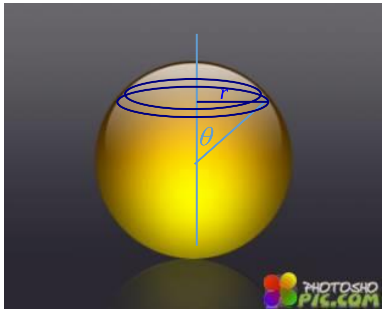
$$I_3 = I_2 = 2\int_0^{L/2} x^2 \rho dx = 2\frac{m}{L}\int_0^{L/2} x^2 dx = \frac{mL^2}{12}\ , \qquad I_1 = 0.$$

В) **Ось вращения на конце стержня.**

$$I_3 = I_2 = \frac{mL^2}{3}\ , \quad I_1 = 0\ .$$

Упражнения. Вычисление моментов инерции тел.

1. Сфера массы m и радиуса a, вращается вокруг геометрической оси.
Метод. Рассечение на множество колец в плоскостях перпендикулярных оси.

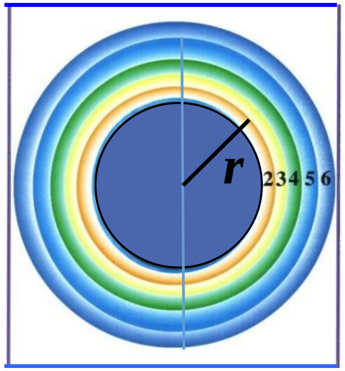


$$I = \int dI = \int dm \cdot r^2 = \int_S \left(dm = \frac{m}{4\pi a^2} \cdot 2\pi a \sin\theta \, d\theta\right) \cdot \left(r^2 = a^2 \sin^2\theta\right) =$$

$$= \frac{ma^2}{2} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{2}{3} ma^2$$

$$\boxed{I_{сферы} = (2/3)\, ma^2}$$

2. Шар массы m и радиуса a, вращающийся вокруг геометрического центра.
Шар рассматривается как набор тонких сферических оболочек:



$$I = \int dI = \int_V \frac{2}{3} r^2 \left(dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} 4\pi r^2 dr\right) = \frac{2m}{a^3} \int_0^a r^4 dr = \frac{2}{5} ma^2$$

$$\boxed{I_{шара} = (2/5)\, ma^2}$$

Точно такой же ответ получается, если «нарезать» шар на диски подобно тому, как была «нарезана» сфера на кольца.

Упражнения. **Вычисление моментов инерции тел.**

1′. Другой изящный способ вычисления момента инерции массивной сферы, на основе принципа симметрии.
Согласно п. 28.3

$$I_x = I_1 = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2) = \int dm \cdot (y^2 + z^2) \ ;$$

Вследствие сферической симметрии – равноправия координатных осей:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3}\int dm \cdot r^2 = \frac{2}{3}\int dm \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \ ;$$

Поскольку поверхность сферы имеет $r = const = a$ **, то:**

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3} m a^2 \, .$$

Упражнение*.
Составить компьютерную программу вычисления момента инерции однородного тора массы M **относительно оси** z **– оси симметрии тора. Радиус окружности в вертикальном сечении тора –** r **,**
радиус образующей окружности R**.**
Убедиться:

$$I_z = M\left(R^2 + \frac{3}{4} r^2\right) \, .$$

29. Момент импульса твердого тела.

Df. **Момент импульса есть векторная сумма составляющих $\boldsymbol{M} = \sum_a \boldsymbol{M_a}$.**

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^{N} m_a \left[\left(\vec{R} + \vec{r}_a \right), \left(\vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_a] \right) \right] =$$

$$= m \left[\vec{R}, \vec{V} \right] + \sum_a m_a \left[\vec{r}_a, [\vec{\Omega}, \vec{r}_a] \right] +$$

$$+ \sum_a m_a \left[\vec{r}_a, \vec{V} \right] +$$

$$+ \sum_a m_a \left[\vec{R}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_a] \right] =$$

$$= m \left[\vec{R}, \vec{V} \right] + \sum_a m_a \left[\vec{r}_a, [\vec{\Omega}, \vec{r}_a] \right] + m \left[\vec{r}_{cm}, \vec{V} \right] + m \left[\vec{R}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{cm}] \right] .$$

29. Момент импульса твердого тела. (продолжение)

29.1. Начало отсчета подвижной системы т. O **помещено в центр масс. Очевидно при** $r_{cm} = 0$,

$$\vec{M} = m\left[\vec{R}, \vec{V}_{cm}\right] + \sum_a m_a \left[\vec{r}_a, [\vec{\Omega}, \vec{r}_a]\right] .$$

Следствие.

«Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульса частицы массы равной массе тела, помещенной в центр масс, движущейся со скоростью центра масс $\boldsymbol{V}_{cm}$ **и момента импульса вращения тела относительно оси, проходящей через т.**O **– центр масс ».**

29.2 Частный случай. Центр масс твердого тело не движется поступательно – $V_{cm} = 0 \rightarrow$

$$\vec{M} = \sum_a m_a \left[\vec{r}_a, [\vec{\Omega}, \vec{r}_a]\right] .$$

29.3. Компонента момента импульса по оси Z.

Рассмотрим $\boldsymbol{M}$ в случае, если ось вращения совпадает с осью z подвижной системы. Векторы $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\Omega} \parallel z \rightarrow$

Определим M_z :

Частица m_a вращается по окружности радиуса ρ_a в плоскости x, y ; скорость частицы $v_a = \Omega \rho_a$.

Компонента момента импульса вдоль оси Z:

$$M_z = \sum_a \rho_a m_a v_a = \sum_a m_a \Omega \cdot \rho_a^2 = I_z \Omega \ .$$

Упражнения.

1. **Доказать соотношение «бац минус цаб»:**

$$\left[\vec{A}, \left[\vec{B}, \vec{C}\right]\right] = \vec{B} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right).$$

2. **Показать:** $K_{Rotate} = \frac{1}{2}\left(\vec{M} \cdot \vec{\Omega}\right) = \frac{1}{2} \sum_a m_a \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_a\right]^2$.

Nb. **Поскольку $K > 0$, то угол между векторами $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}$ меньше $\pi/2$.**

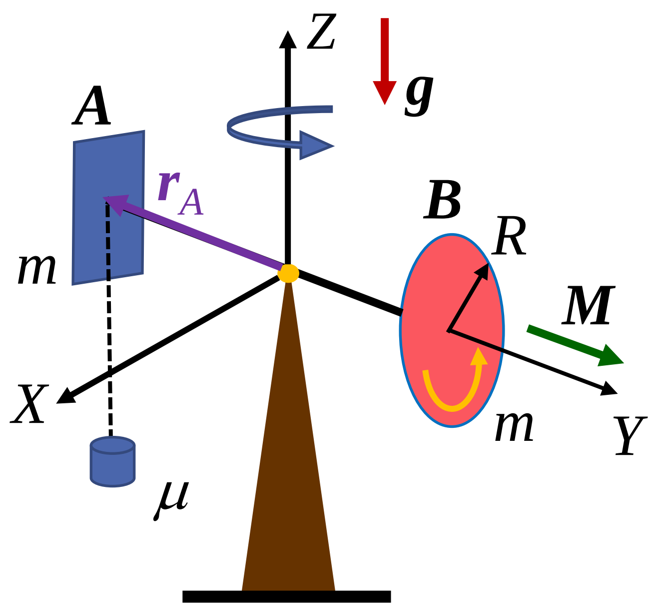
30. Уравнения движения твердого тела.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{external}\,, \qquad \vec{P} = m \cdot \vec{V}_{cm}\,;$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}_{external} = \left[\vec{r}\,, \vec{F}_{external}\right]. \qquad (XX)$$

Вращение относительно неподвижной оси , например, оси Z

$$\frac{d}{dt}(I_Z\Omega) = K_Z\,.$$



30.1. Эксперимент.

1. $\Omega = 0$.

Внесен перегрузок массы μ **.**

Дополнительный момент силы вдоль X **–**

$$\boldsymbol{K} = [\,\boldsymbol{r}_A\,,\ \mu\,\boldsymbol{g}] = (K_X\,, 0, 0);$$

При $\Omega = 0$ **– нарушается равновесие по вертикали.**

2. Пусть $\Omega \neq 0$.

При очень быстром вращении диска момент импульса: $|\boldsymbol{M}\,| = I_Z\,|\boldsymbol{\Omega}|$**. Вектор** $\boldsymbol{M} \uparrow\downarrow \boldsymbol{r}_A$ **.**

$\vec{M} = M_Y \parallel Y\,, \Rightarrow \vec{M} = (0, M_Y, 0)$ **. Нетрудно видеть:** $\vec{r}_A = -\dfrac{\vec{M}}{I_Z\Omega}|r_A|$.

Подставляя в основное уравнение динамики момента импульса (XX) **имеем:**

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{r}\,, \vec{F}_{external}\right] = -[\vec{r}_A, \mu\vec{g}]$$

Преобразуем:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -[\vec{r}_A, \mu\vec{g}] = -\left[\frac{\vec{M}}{I_Z\Omega}|r_A|, \mu\vec{g}\right] = \frac{\mu r_A}{I_Z\Omega}\left[\vec{g}, \vec{M}\right].$$

Через бесконечно малый интервал времени dt **у момента импульса** $\boldsymbol{M}$**, направленного первоначально вдоль оси** Y **появляется приращение** $d\boldsymbol{M}$**, направленное по оси** X **!**

$$d\vec{M} = \frac{\mu r_A}{I_Z\Omega}\left[\vec{g}, \vec{M}\right] \cdot dt\,; \quad \vec{M} = M_Y \parallel Y, \qquad d\vec{M} \parallel X\,.$$

Утверждение.

Если приращение вектора ортогонально самому вектору, то вектор только поворачивается.

Совершается «прецессия» вектора ***M.***

Нетрудно оценить частоту прецессии $\omega_{\text{прец.}}$.

Упражнение. **Показать, что частота прецессии:**

$$\omega_{\text{прец.}} = \frac{\mu g r_A}{I_Z\Omega}\,.$$

Оценка.

$m \sim 0{,}1$ кг; $\mu \sim 0{,}01$ кг; $r_A \sim 0{,}25$ м; $R \approx 0{,}05$ м; $\Omega \sim 10^4$ об /мин $\approx 10^3$ с$^{-1}$.

$$\omega_{\text{прец.}} = \frac{\mu g r_A}{I_Z\Omega} = \frac{2\mu g r_A}{mR^2\Omega} \sim 0{,}2\ c^{-1}, \qquad T_{\text{прец.}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{прец.}}} \sim 2\ \text{мин}.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

http://phys.nsu.ru/fit

http://el.nsu.ru